Lezione 5

FIBRATI

Def: Un FIBRATO con fibra F è una mappa liscia $E \xrightarrow{\pi} B$ fra varietà lisce

varietà fissata

t.c. $\forall\, p \in B \ \exists\, U(p)$, $\exists\, \varphi : \pi^{-1}U \xrightarrow{\sim} U \times F$ t.c.

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[r, "\varphi", "\sim"'] \arrow[d, "\pi"'] & U \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

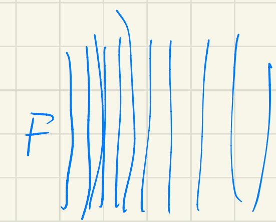
$p \times F$

proiez. primo fattore

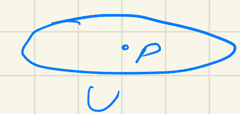
$p \in U$

Oss: π è sommersione

$$d\pi_p = (d\pi_1)_{\varphi(p)} \circ d\varphi_p \quad \text{è suriettiva.}$$



Un rivestimento è un fibrato con F che ha $\dim F = 0$



Esempio: FIBRATO BANALE $E = F \times B \xrightarrow{\pi} B$

Def: Una SEZIONE per un fibrato è $s: B \to E$ t.c.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ B \arrow[u, bend left, dashed, "s"] \end{tikzcd} \qquad \pi \circ s = id_B$$

$\forall p \in B \quad E_p = \pi^{-1}(p) \subseteq E$
$\cong$
F FIBRA

FIBRATO VETTORIALE

Def: Un FIBRATO VETTORIALE è un fibrato in cui $F = \mathbb{R}^k$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ B \end{tikzcd}$$

E_p

e E_p ha struttura di spazio vettoriale

e nel diagramma

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[r, "\sim", "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"'] & U \times \mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ U & \end{tikzcd}$$

$\varphi : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$
è isom. vettoriale

$\varphi|_{E_p} : E_p \to \{p\} \times \mathbb{R}^k$
isom.
diffeo

Es: FIBRATO BANALE: $E = B \times \mathbb{R}^k$

Morfismo fra fibrati vettoriali:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

t.c. f, F lisce & $F|_{E_p} : E_p \to E'_{f(p)}$ LINEARE

Manipolazioni:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dr, "\pi"'] & & E' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd} \longrightarrow \quad (1)\ \begin{tikzcd} E\oplus E' \arrow[d, "\pi"] \\ M \end{tikzcd} \quad (2)\ \begin{tikzcd} E^* \arrow[d] \\ M \end{tikzcd} \quad (3)\ \begin{tikzcd} E\otimes E' \arrow[d] \\ M \end{tikzcd}$$

(1) La fibra $(E\oplus E')_p = E_p \oplus E'_p$

$$E\oplus E' = \bigcup_{p\in M} (E\oplus E')_p$$

come insieme ok

struttura liscia da vedere

La fibra $(E\oplus E')_p$ è spazio vettoriale ok

(2) $\underline{(E^*)}_p = \underline{(E_p)}^*$ $\qquad E^* = \bigcup_{p\in M} E_p^*$

(3) $(E\otimes E')_p = E_p \otimes E'_p$ $\qquad E\otimes E' = \bigcup_{p\in M} (E\otimes E')_p$

(1) Un aperto $U \subseteq M$ su cui $\exists\, \varphi : \pi^{-1}U \xrightarrow{\sim} \underline{U\times \mathbb{R}^k}$ si chiama TRIVIALIZZANTE

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}U \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & U\times\mathbb{R}^k \arrow[dl, "\pi_1"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$\forall p$ Prendo $U(p)$ trivializzante per E & E' $\qquad$ k = rango di E

$$\begin{array}{ccc} E & & E' \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & M & \end{array}$$

$$\pi^{-1}U \underset{\text{DIFF}}{\cong} U \times \mathbb{R}^k$$

$$(\pi')^{-1}U \underset{\text{DIFF}}{\cong} U \times \mathbb{R}^{k'}$$

$$\pi^{-1}U \underset{\text{INSIEM.}}{=} U \times (\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^{k'})$$

$$= U \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'}$$ ha str. liscia

④ $\quad \begin{array}{c} Hom(E, E') \\ \downarrow \\ M \end{array} \qquad Hom(E,E')_p := Hom(E_p, E'_p)$

⑤ $\quad \begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{c} \mathcal{T}^k_h(E) \\ \downarrow \\ M \end{array} \qquad \mathcal{T}^k_h(E)_p = \mathcal{T}^k_h(E_p)$

Def: $\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$. Un SOTTOFIBRATO è $E' \subseteq E$ sottovarietà t.c.

1) $E'_p := E_p \cap E'$ sia sottosp. vett. di E_p

e 2) $\pi|_{E'} : E' \to M$ è un fibrato (manca trivial. loc.)

Il FIBRATO QUOZIENTE E/E'

$$\left(E/E' \right)_p = E_p / E'_p$$

Oss: morfismi

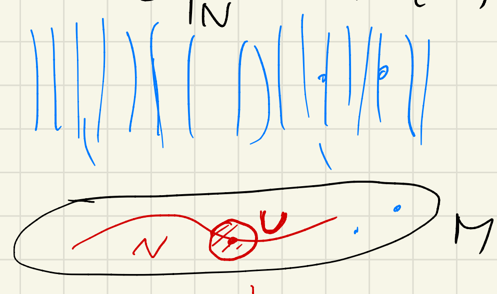
$$\begin{tikzcd} E' \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & E/E' \arrow[d, "\pi"] \\ M \arrow[r, "id"'] & M \arrow[r, "id"'] & M \end{tikzcd}$$

Def: Se $N \subseteq M$ sottovarietà

$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

La RESTRIZIONE di π a N è $E|_N := \pi^{-1}(N)$

$$\begin{array}{c} E|_N \\ \pi \downarrow \\ N \end{array}$$ è un fibrato



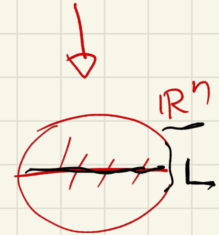
PULL-BACK

$$\begin{tikzcd} f^*E \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, dashed, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & E \arrow[d, "\pi"] \\ N \arrow[r, "f"'] & M \end{tikzcd}$$

morfismo

f liscia qualsiasi

$$\frac{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k}{L \times \mathbb{R}^k} \longrightarrow$$



$v \in E \ni (p, v) \quad v \in E_p$

$\downarrow \pi \qquad p = \pi(v)$

$M \ni p$

f^*E è il PULL-BACK di E ed è definito così:

$$\begin{array}{ccc} f^*E & & E \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ N & & M \end{array}$$

$$N \times E \supseteq f^*E = \{(q, v) \mid q \in N,\ v \in E,\ \underline{f(q) = \pi(v)}\} \xrightarrow{\pi} N$$

$$\downarrow F$$

$$E$$

$(f^*E)_q = E_{f(q)}$ sp. vett.

$q \in N$

Prop: f^*E è sottovarietà di $N \times E$

(f^*E è sottofibrato di $N \times E \to N$)

dim: Localmente

$$\begin{array}{ccc} & & E \\ & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array} \dashrightarrow \begin{array}{ccc} & & \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\ & & \downarrow \pi \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Loc. $f^*E = \{ (\underbrace{q}_{N}, \underbrace{x, y}_{E}) \mid q \in \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^k, f(q) = x \}$

$= \underbrace{\{\text{grafico di } f\} \times \mathbb{R}^k}_{\text{LOC. TRIVIALIZZ.}} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$ $\square$

Ex: Se $f : N \to M$ è cost, allora f^*E è banale

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{F} & E \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ N & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Def: Un ISOMORFISMO di fibrati è un morfismo invertibile

$$\begin{array}{ccc} E & \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} & E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} & N \end{array}$$

$F \circ G = id \quad G \circ F = id$

$f \circ g = id \quad g \circ f = id$

$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ M \end{array}$ è BANALE se isom. a $\begin{array}{c} M \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow \\ M \end{array}$

FIBRATO TANGENTE

Def: M^n liscia. Il FIBRATO TANGENTE su M è

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \qquad \begin{array}{c} TM \\ \downarrow \pi \\ M \end{array} \qquad \begin{array}{c} T_pM \\ \downarrow \\ p \end{array} \qquad (TM)_p = T_pM$$

Struttura liscia:

Per ogni carta $\varphi : U \xrightarrow{\sim} V \subseteq \mathbb{R}^n$ di M costruisco una carta per TM che è anche trivializzazione

ottengo

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \pi^{-1}U & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & V \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) & \longmapsto & (\varphi(p), d\varphi_p(v)) \end{array}}$$

$v \in T_pM$

$p \in U$

$$d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}V = \mathbb{R}^n$$

$\bar{\varphi}$ è diffeo $\qquad \bar{\varphi}^{-1}(q, w) = (\varphi^{-1}(q), (d\varphi^{-1})_q(w))$

$\square$

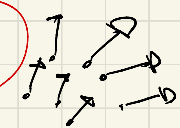
Ex: TM è sempre orientabile, anche se M non lo è.

Def: Il FIBRATO COTANGENTE è $T^*M := (TM)^*$

$$(T^*M)_p := T_pM^*$$

Oss: $f: M \to \mathbb{R}$ liscia

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

grad f  $: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$df_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R} = \mathbb{R}$$

$$df_p : T_pM \to \mathbb{R} \Rightarrow df_p \in T_pM^*$$

Quindi posso interpretare df come una SEZIONE di T^*M

$$\begin{tikzcd} E \text{ vett.} \arrow[d] \\ M \arrow[u, bend left, dashed, "s"] \end{tikzcd} \qquad s(p) \in E_p$$

Def: $\Gamma E = \{\text{sezioni di } E\}$.

sono uno spazio vettoriale

sono anche un $\mathcal{C}^\infty(M)$-modulo

$s \in \Gamma E \qquad f \in \mathcal{C}^\infty(M) = \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$

$f \cdot s \in \Gamma E \qquad (f \cdot s)(p) = \underline{f(p)} \cdot s(p)$

$s(p) \in E_p$

$$\boxed{df \in \Gamma(T^* M)}$$

Es: $\underset{\text{aperto}}{U \subseteq \mathbb{R}^n} \Rightarrow TU = U \times \mathbb{R}^n \qquad T_pU = \mathbb{R}^n$

Es: $\underset{\text{sottovarietà}}{M \subseteq \mathbb{R}^n} \Rightarrow T_pM \subseteq \mathbb{R}^n$

$TM \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

$\shortparallel$

$\{(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M, v \in T_pM\}$

Es: $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$

$TS^{n-1} = \{(x,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1, \langle v, x \rangle = 0\}$

$M \subseteq N$ sottovarietà

$p \in M \subseteq N$

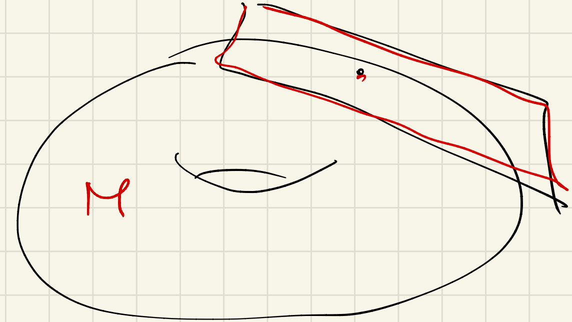
$\underset{\text{sottospazio}}{T_pM \subseteq T_pN}$

$M \subseteq \mathbb{R}^n$

$T_pM \subseteq T_p\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$

FIBRATO TENSORIALE su M: $\mathcal{T}_h^k(M)$

$$\begin{array}{c}\mathcal{T}_h^k(M)\\ \downarrow\\ M\end{array}$$



$$\boxed{\mathcal{T}_h^k(M)} = \boxed{\mathcal{T}_h^k(TM)}$$

$$\mathcal{T}_h^k(M)_p = \mathcal{T}_h^k(T_pM)$$

$$\boxed{\mathcal{T}_0^k(E)}$$
$$\cup\!|$$
$$\Lambda^k(E)$$

$$S^k(M) \qquad \Lambda^k(M) = \Lambda^k(TM)$$

$$\omega(p) \in \Lambda^k(M)_p = \Lambda^k(T_pM)$$

$$\underline{\omega(p)(v_1, \dots, v_k) \in \mathbb{R}}$$

Def: Un <u>CAMPO VETTORIALE</u> in M è una $X \in \Gamma TM$

$$X(p) \in T_pM$$

Una <u>K-FORMA</u> in M è una $\omega \in \Gamma \Lambda^k M$

Un **TENSORE METRICO** su M è una $g \in \Gamma S^2 M$ t.c.

$\left(g(p)(v,w) \in \mathbb{R} \quad \forall v,w \in T_pM \right)$

$g(p)$ sia non degenere $\quad g(p) : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$

(se anche $g(p)$ def >0)

diciamo che g è **TENS. METR. DEF +**

Def: Una **METRICA RIEMANNIANA** su $\begin{matrix} E \\ \downarrow \\ M \end{matrix}$ è un tensore metrico def +

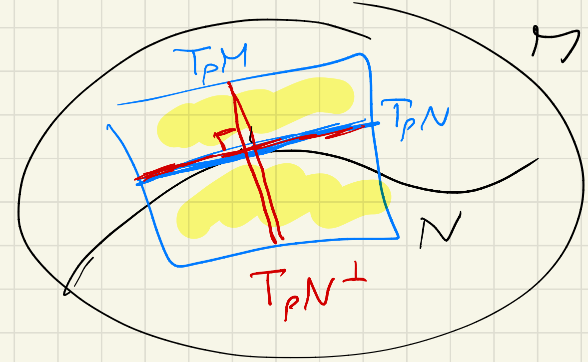
STRUTTURA PSEUDO-RIEMANNIANA su $\begin{matrix} E \\ \downarrow \\ M \end{matrix}$ è un tensore metrico

Una MET. RIEM. su M è una su TM

STR. P.R. su M .. .. TM

Def: $N \subseteq M$ sottovarietà

νN FIBRATO NORMALE

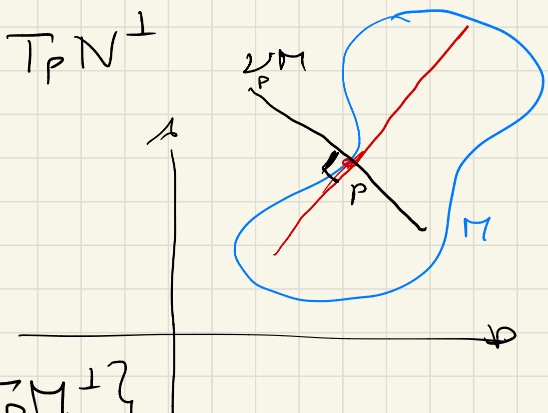


$$\nu N = TM|_N \Big/ TN$$

$$\nu N_p = T_pM \Big/ T_pN = T_pN^\perp$$

Oss Se g è una metrica riemanniana su M

Si può identificare $\nu N_p = T_pN^\perp$



Esempio: Se $M \subseteq \mathbb{R}^n$ νM

uso il prodotto scalare euclideo

$$\nu M = \{(p,v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mid p \in M,\ v \in T_pM^\perp\}$$

$TM =$ " " " " " " " " " " T_pM "